Die mit (L) gekennzeichneten Aufgaben sind für
alle Studierende, also auch die Lehramt-Studierenden, geeignet.

Funktionen

1. Sei $a \in \mathbb{R}$ mit $a \geq 0$. Wir betrachten die folgende Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x| + 1}{|x| + a} & : x \neq 0 \\ \\ \dfrac{1}{2} & : x = 0 \end{cases}$$

   a) (L) Untersuche f in Abhängigkeit von a auf Stetigkeit!

   b) (L) Bestimme $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x)$!

   c) (L) Untersuche f auf Differenzierbarkeit und bestimme $f'(x_0)$ an den Stellen x_0, an denen f differenzierbar ist.

   d) Zeige, dass f für $x > 0$ und $a \neq 0$ gleichmäßig stetig ist!

2. (L) Wir betrachten die Funktion $f : [-\pi, +\pi] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \sin\left(\frac{x}{2}\right) + 1$.

   a) Gib die Wertemenge (das Bild von f) an und begründe mit einem geeigneten Satz aus der Vorlesung, dass auch jeder Funktionswert in diesem Bereich angenommen wird.

   b) Begründe, warum f ein Minimum und Maximum hat und gib diese an!

   c) Begründe, warum f eine Umkehrfunktion f^{-1} besitzt. Bestimme diese und berechne die Ableitung der Umkehrfunktion!

3. (L) Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = e^{x^2 \cdot (4x+6)}$. Bestimme die lokalen Maxima und Minima! Handelt es sich dabei auch um globale Extrema?

4. Mathe Nacht

Zahlenfolgen

Konvergenz

1. (L) Bestimme die angegebenen Grenzwerte, falls sie existieren. Dabei sind $a, b, k \in \mathbb{N}$.

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \qquad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n + b^n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{n^3 + 4n^2 + 1}{4n^3 + 2n^2 + n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{\binom{2n}{n}} \qquad \lim_{n\to\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$$

Häufungswerte

2. (L) Bestimme die Häufungswerte der angegebenen Folgen! Dabei ist $z \in \mathbb{C}$.

$$a_n := \sqrt[n]{1 + (-1)^n} \qquad b_n := \left|\frac{1}{n} + i^n\right|$$

$$c_n := \frac{|z|^n}{1 + |z|^n} \qquad d_n := \frac{i^n}{1 + in}$$

Wie sind die Häufungswerte der Folge b_n, wenn man die Betragsstriche weglässt?

Rekursive Folgen

3. Zeige die Konvergenz der folgenden rekursiv definierten Zahlenfolgen und bestimme deren Grenzwert!

$$a_{n+1} = \frac{2a_n + 1}{3},\ a_0 = 0 \qquad b_{n+1} = \sqrt{1 + b_n},\ b_0 = -1$$

$$c_{n+1} = \frac{1}{1 + 2c_n},\ c_0 = 0 \qquad d_{n+1} = \frac{3(1 + d_n)}{3 + d_n},\ d_0 = 1$$

Beweise über Folgen

4. Beweise folgende Aussagen! Dabei sind (a_n) und (b_n) Folgen aus $\mathbb{R}$.

   a) (L) Gilt $a_n \to a$ und $b_n - a_n \to 0$, so folgt $b_n \to a$.

   b) (L) Es gilt $a_n \to a$ und $b_n \to b$ genau dann, wenn $a_n - b_n$ und $a_n + b_n$ konvergent sind.

   c) Die Folge (a_n) konvergiert genau dann gegen $a \in \mathbb{R}$, wenn es eine monoton fallende Nullfolge (b_n) gibt, mit $|a_n - a| \leq b_n$.

5. Für welche $q \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{R}$ konvergiert die Folge $a_n := q^n n^k$?

Reihen

1. Untersuche folgende Reihen auf Konvergenz und gib bei zwei Reihen den Grenzwert an!

(L) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+i)^n}{2^n}$ (L) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^k}{k!}$

(L) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$ (L) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{c^{2n+1}}{(1+c^2)^n}, \ c \in \mathbb{R}$

(L) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\binom{5n}{4n}}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha + \frac{1}{n})^n, \ \alpha > -1$

(L) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^5 + 4n^4 + 1}{8n^8 + 2n^3 + n^2 + 5}$ (L) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n^6 - 6n^3}{3n^7}$

2. (L) Untersuche folgende Reihen auf Konvergenz bzw. absolute Konvergenz!

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)(n^2-1)}{n^3+1}$$

3. Zeige folgende Aussagen!

   a) (L) Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} x_n - x_{n+1}$ konvergiert genau dann, wenn $(x_n) \subset \mathbb{R}$ eine konvergente Zahlenfolge ist.

   b) Es seien $(a_n), (b_n) \subset \mathbb{R}$ Zahlenfolgen mit $a_n > 0, b_n > 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$. Außerdem gelte $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$. Dann folgt aus der Konvergenz von $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ die Konvergenz von $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

4. (L) Es seien $(a_n), (b_n) \subset \mathbb{R}$ Folgen mit $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergent und $|b_n| \leq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Gib eine Folge a_n und eine Folge b_n an so, dass $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$ divergiert. Gib außerdem eine allgemeine Bedingung an die Folge a_n an, sodass $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$ stets konvergiert.

4. Mathe Nacht

Gleichungen und Ungleichungen

Darstellung komplexer Zahlen

1. (L) Skizziere die folgenden Mengen!

   a) $M_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z-1| = |z+1|\}$

   b) $M_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1, |Re(z)| \leq \frac{1}{2}, |Im(z)| > \frac{3}{4}\}$

   c) $M_3 = \{z \in \mathbb{C} : 1 < z + \bar{z} < 3\}$

   d) $M_4 = \{z \in \mathbb{C} : |z+1| \leq |z-i| \leq |z-1|\}$

   e) $M_5 = \{z \in \mathbb{C} : 3z\bar{z} - 6z - 6\bar{z} + 9 = 0\}$

Reelle Zahlen

2. (L) Bestimme die Menge aller reellen Zahlen x, die die folgenden Gleichungen und Ungleichungen erfüllen.

   a) $\sqrt{x+1} = x$

   b) $|8x-5| \leq |7x+15|$

   c) $||x+1|-2| = 1$

   d) $\dfrac{5x+5}{|3x+1|} = 2$

   e) $x - |2x+4| > 1 - |x-2|$

   f) $4 - |4x+6| + |2x-2| = 0$

4. Mathe Nacht

Vollständige Induktion

Beweise die folgenden Aussagen mittels vollständiger Induktion!

1. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\sum_{b=1}^{n} b(b+1) = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$
2. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\sum_{i=1}^{n} \dfrac{i}{2^i} = 2 - \dfrac{n+2}{2^n}$
3. Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ gilt: $\prod_{k=1}^{n-1}(1+\dfrac{1}{k})^k = \dfrac{n^n}{n!}$
4. $n^2 + n$ ist für alle $n \in \mathbb{N}$ eine gerade Zahl.
5. Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ gilt: $n^2 > n + 1$
6. $9^n - 1$ ist für alle $n \in \mathbb{N}$ durch 8 teilbar.
7. $11^{n+2} + 12^{2n+1}$ ist für alle $n \in \mathbb{N}$ durch 133 teilbar.
8. Die Anzahl der Diagonalen in einem ebenen n-Eck beträgt $\dfrac{n^2 - 3n}{2}$.

4. Mathe Nacht

Beweise

1. (L) Seien $(a_n), (b_n)$ reelle Zahlenfolgen, wobei (a_n) konvergent sei mit dem Grenzwert a_0. Weiter sei (b_n) beschränkt und b_0 sei ein Häufungspunkt von (b_n).

   Beweise oder widerlege!

   a) $(a_n b_n)$ hat den Grenzwert $a_0 b_0$.

   b) $a_0 b_0$ ist ein Häufungspunkt von $(a_n b_n)$.

   c) $a_n b_n$ ist beschränkt.

2. (L) Es sei (b_n) eine reelle Zahlenfolge mit $0 < b_n < 1 \ \forall n \in \mathbb{N}$.

   a) Es sei (a_n) eine weitere reelle Zahlenfolge mit $a_n = b_1 \cdot \ldots \cdot b_n \ \forall n \in \mathbb{N}$. Untersuche (a_n) auf Monotonie, Beschränktheit und Konvergenz.

   b) Zeige: Konvergiert (b_n) gegen $b_0 < 1$, so ist a_n (definiert wie in a)) eine Nullfolge.

3. (L) Sei (a_n) eine reelle Zahlenfolge mit $a_n \geq 0 \forall n \in \mathbb{N}$. Zeige: Ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent, so konvergiert auch $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$.

4. (L) Zeige: Jedes Polynom $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ungeraden Grades hat mindestens eine (reelle) Nullstelle. (Tipp: Zwischenwertsatz)

5. (L) Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ zwei differenzierbare Funktionen. Zeige: Gilt $f(a) = g(a)$ und $f(b) = g(b)$, so gibt es ein $\zeta \in [a, b]$ mit $f'(\zeta) = g'(\zeta)$.